Departamento de Matemática
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão
Matemática II - 2º Semestre - 2019/2020

Época de Recurso : 3 de julho de 2020
Duração: 2h
Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

Nota prévia: no que se segue apresenta-se uma sugestão de resolução para UMA das versões do exame; as resoluções para as outras versões são equivalentes com as devidas alterações numéricas

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Calcule os valores próprios de A e respectivas multiplicidades algébricas.

Resolução:
λ é valor próprio de A sse $|A-\lambda I| = 0$ sse $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ sse $(2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0$
Ou seja λ é valor próprio de A sse $-\lambda(2-\lambda)^2 = 0$. Logo os valores próprios de A são $\lambda = 0$, com multiplicidade algébrica 1 e $\lambda = 2$ com multiplicidade algébrica 2.

(b) Para **um** dos valores próprios encontrado na alínea anterior, indique a multiplicidade geométrica e o conjunto dos vectores próprios associados a esse valor próprio.

Resolução: Consideremos, por exemplo, o valor próprio $\lambda = 2$. Os vetores próprios, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, associados ao valor próprio 2 são as soluções não nulas do sistema $(A-2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Como
$(A-2I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_1 - v_2 + v_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ v_1 + v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -v_2 + v_3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$,
obtemos que as soluções do sistema são os vetores $\mathbf{v}$ da forma $\mathbf{v} = (-v_2 + v_3, v_2, v_3)$, $v_2, v_3 \in \mathbb{R}$.
Logo, o valor próprio 2 tem multiplicidade geométrica 2 e o conjunto dos vetores próprios de A a ele associados é

$$\{a(-1,1,0) + b(1,0,1) : a, b \in \mathbb{R},\ \text{a, b não simultaneamente nulos}\}.$$

2. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x^2+y^2-1)}$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

Resolução:
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 \geq 0 \wedge x^2 + y^2 - 1 > 0 \wedge ln(x^2+y^2-1) \neq 0\} =$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2 \wedge x^2 + y^2 > 1 \wedge x^2 + y^2 \neq 2\}$.

(b) Defina a fronteira e a aderência do conjunto D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.

Resolução:
$fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -2 \vee x = 2 \vee x^2 + y^2 = 1 \vee x^2 + y^2 = 2\}$.
$ad(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 \geq 0 \wedge x^2 + y^2 - 1 \geq 0\}$.
D_f não é compacto porque não é limitado; OU D_f não é compacto porque não é fechado $D_f \neq ad(D_f)$;

(c) Será que pode existir uma sucesssão $(a_n, b_n) \in D_f$ tal que $\lim_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n) \notin D_f$? Em caso afirmativo, dê um exemplo de uma sucessão nas condições referidas.

Resolução: Sim, porque o conjunto não é fechado; por exemplo $(0, 1 + \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$;

3. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{x+y} & \text{se } x \neq -y \\ y & \text{se } x = -y \end{cases}$.

(a) Estude a continuidade da função f nos pontos da forma $(a,-a)$, para $a \in \mathbb{R}$. (*sugestão: considere os casos $a=0$, $a=1$ e $a \neq 0,1$ em separado*)

Resolução: f é contínua em $(a,-a)$ sse existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y) = f(a,-a) = -a$.
Sendo $B_1 = \{(x,y) : x \neq -y\}$ e $B_2 = \{(x,y) : x = -y\}$ temos que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y)$ sse existem e são iguais

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} f_{|B_1}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,-a)} f_{|B_2}(x,y)(= -a).$$

Temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} f_{|B_1}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} \dfrac{x^2+y}{x+y} = \begin{cases} \infty & \text{se } a^2 - a \neq 0 \\ (0/0) & \text{se } a^2 - a = 0 (\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1) \end{cases}$.

No caso de $a = 0$, se consideramos os limites direcionais $y = mx$, $(m \neq -1)$ obtemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+mx}{x+mx} = \lim_{x\to 0} \frac{x+m}{1+m} = \frac{m}{1+m},$$

donde concluímos que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y}{x+y}$.
Analogamente, no caso $a = 1$, considerando os limites direcionais $y = m(x-1)-1$, concluíriamos que não existe

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2+y}{x+y}.$$

Assim, podemos afirmar que a função não é contínua em nenhum ponto da forma $(a,-a)$, $a \in \mathbb{R}$.

(b) Calcule a função $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, para todos os pontos (x,y) para os quais esteja definida.

Resolução: Se $x \neq -y$, utilizando as regras de derivação temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x+y) - (x^2+y)}{(x+y)^2}.$$

Para os pontos (x,y), com $x = -y$ (ou seja, os pontos da forma (a,-a)) temos, por definição

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a,-a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,-a) - f(a,-a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(a+h)^2 - a}{a+h-a} - (-a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a + ah}{h^2}, \end{aligned}$$

donde deduzimos que se $a \neq 0$, o limite não existe ou é infinito e se $a = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim \frac{h^2}{h^2} = 1$.

4. Considere o seguinte conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 5\}$. Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar o ponto (x,y) (ou os pontos) do conjunto M para o qual a soma da sua abcissa com o dobro da sua ordenada é máxima.

Resolução: O problema é

$$\min_{(x,y)\in M} f(x,y)$$

onde

$$f(x,y) = x + 2y \text{ e } M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\} \text{ com } g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 5.$$

Como $f, g \in C^1$ e o Jacobiano de g é $Jg = [2(x-1), 2y]$ não tem característica máxima (neste caso 1) se e só se $(x,y) = (1,0) \notin M$, sabemos que o Jacobiano tem característica máxima em qualquer extremante local de f em M.
Assim, sendo

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y),$$

sabemos que qualquer extremante local de f em M é ponto crítico da função lagrangiana $\mathcal{L}$ ou seja, satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda 2(x-1) & = 0 \\ 2 - \lambda 2y & = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 5 & = 0 \end{cases}.$$

Da primeira e segunda equações vem $x = 1 + \dfrac{1}{2\lambda}$ e $y = \dfrac{1}{\lambda}$. Substituindo na terceira fica $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 5$, donde, $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$.
Assim, os pontos (x,y) que satisfazem o sistema são $(2,2)$ e $(0,-2)$. Como M é compacto e f é contínua, pelo teorema de Weierstrass f tem extremantes absolutos em M, que têm de estar entre os pontos críticos da Lagrangiana.
Desta forma, basta comparar os valores de f para estes dois pontos encontrados anteriormente:

$$f(2,2) = 6 > -4 = f(0,-2).$$

Assim, o maximizante que procuramos é $(x,y) = (2,2)$.

5. Considere o conjunto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x, y \geq x, y \leq 2\}$. Calcule $\displaystyle\iint_\Omega (2y + x)\, dxdy$.

Resolução: O integral, escrito como região de tipo II é

$$\int_0^2 \left(\int_{-y}^{y} 2y + x\, dx \right) dy.$$

Escrito como soma de regiões do tipo I seria

$$\int_{-2}^{0} \left(\int_{-x}^{2} 2y + x\, dy \right) dx + \int_0^2 \left(\int_x^2 2y + x\, dy \right) dx.$$

No caso de escrito como região de tipo II

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_{-y}^{y} 2y + x\, dx \right) dy &= \int_0^2 2y \cdot 2y + \frac{x^2}{2}\Big|_{-y}^{y} dy \\ &= \int_0^2 4y^2 + 0\, dy \\ &= 4\frac{y^3}{3}\Big|_0^2 \\ &= \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

No caso de escrito como soma de regiões de tipo I, a primeira parcela seria $\int_{-2}^{0} \left(\int_{-x}^{2} 2y + x\, dy \right) dx = \int_{-2}^{0} y^2\Big|_{-x}^{2} + x \cdot (2+x)\, dx = \ldots = 4.$
e a segunda $\int_0^2 \left(\int_x^2 2y + x\, dy \right) dx = \int_0^2 y^2\Big|_x^2 + x \cdot (2-x)\, dx = \ldots = 12 - \dfrac{16}{3}$. *Somando ficaria* $4 + 12 - \frac{16}{3} = \frac{48-16}{3} = \frac{32}{3}$.

6.(a) Encontre o conjunto de todas as soluções da seguinte equação diferencial $y'' + 4y = 3$.

Resolução:
Solução geral da equação homogénea associada: $y'' + 4y = 0$.
Temos que o polinómio característico associado é $D^2 + 4$, cujas raizes são

$$D^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad D = \pm 2i.$$

Assim, a solução geral da equação homogónea é

$$y_h(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Solução particular:
Vamos procurar uma solução particular $y_p(x)$ da forma $y_p(x) = A$. Como $y_p'(x) = y_p''(x) = 0$, obtemos

$$y_p''(x) + 4y_p(x) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4A = 3 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{3}{4}.$$

Solução geral da equação diferencial dada:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{3}{4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(6.b) Resolva o seguinte problema de valores iniciais: $\begin{cases} y'(y^2+1) = x^2 y \\ y(2) = 1 \end{cases}$;

Resolução:
Solução geral da equação diferencial dada:
Observando que a solução constante $y(x) = 0$ não pode ser solução do problema de valores iniciais dado, temos que, para $y \neq 0$, a equação diferencial dada é equivalente a

$$\frac{y^2+1}{y} dy = x^2 dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \left(y + \frac{1}{y} \right) dy = \int x^2 dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2(x)}{2} + \ln|y(x)| = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Determinar a constante:
Usando a condição inicial dada, temos que

$$y(2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \ln|1| = \frac{2^3}{3} + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{13}{6}.$$

A solução do problema de valores iniciais é dada implicitamente por

$$\frac{y^2(x)}{2} + \ln|y(x)| = \frac{x^3}{3} - \frac{13}{6}.$$

7. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ para a qual se tem $g(u,v) > 0$, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, e considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \ln\left(g(x+y, y^2)\right).$$

(a) Sabendo que $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0$ se e só se $u + v = 4$ e que a função g tem um único ponto crítico, $(0,4)$, calcule todos os pontos críticos da função f.

Resolução:

Temos que os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{g} = 0 \\ \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{g} = 0 \end{cases} \underset{(g>0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

e como $u(x,y) = x + y$ e $v(x,y) = y^2$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} + 2y\frac{\partial g}{\partial v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \\ 2y\frac{\partial g}{\partial v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 4 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + y^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 0 \\ v = 4 \end{cases}$$

o que e equivalente a

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases},$$

donde concluimos que $(4,0), (-2,2)$ e $(2,-2)$ são os pontos críticos de f.

(b) Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ calcule, em função de g e das suas derivadas parciais, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

Resolução:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{g}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial g}{\partial u}}{g}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)g - \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)g - \frac{\partial g}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{g^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\right)g - \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - 2y\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}}{g^2}$$

Cotações:

1a)	1b)	2a)	2b)	2c)	3a)	3b)	4	5	6a)	6b)	7a)	7b)
1,5	1,5	1,5	1,5	1	1,5	1,5	2,0	2,5	1,0	1,5	1,5	1,5